Les Axiomes de Tarski

Jean-Yves Béziau[1]
Institut de Logique
Université de Neuchâtel
Suisse

0. Introduction

A la fin des années 1920, Tarski développe une théorie connue aujourd'hui sous le nom de théorie de l'opérateur des conséquence : il présente des axiomes pour un opérateur *Cn* qui à chaque ensemble d'objets *X* associe un autre ensemble d'objets *Cn*(*X*) de même nature, appelés conséquences de *X*. Il s'agit d'une théorie très abstraite puisque la nature des objets sur lesquels porte cet opérateur n'est pas spécifiée outre mesure.

Cette théorie en beaucoup de sens est extraordinaire et il semblerait que malgré le récent regain d'intérêt à son égard, sa valeur, sa signification et sa portée n'ont pas encore été pleinement comprises. En particulier on n'a pas encore réalisé combien cette théorie était en avance sur son temps, comment elle marque un tournant dans l'histoire de la logique moderne, en libérant la logique du carcan formaliste et en la projetant dans la sphère de la plus haute abstraction.

Le but de cet article n'est pas de présenter et de discuter de façon systématique l'origine et le développement de la théorie de l'opérateur de conséquence - il faudrait pour cela un volume suffisamment épais pour servir de banc – mais de discuter seulement d'un de ses aspects : ses axiomes. Dans d'autres articles nous avons déjà discuté ou nous discuterons d'autres aspects de cette théorie. Le présent article n'est donc qu'un parmi d'autres dont la somme pourrait finir par constituer le dit banc.

1. Apparition des axiomes de Tarski

La théorie de Tarski a été publiée initialement dans deux notes et un article :

« Remarques sur les notions fondamentales de la méthodologie des mathématiques », petite note de 3 pages, compte rendu d'une séance de la *Société Polonaise de Mathématique* publié en 1928 (T28).

« Über einige fundamenten Begriffe der Metamathematik », note de 8 pages, compte rendu d'une séance de la *Société des Sciences et des lettres de Varsovie* publié en 1930 (T30a).

« Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I », exposé systématique de 44 pages publié dans le *Monatshefte für Mathematik und Physik* en 1930 (T30b)

Il faut également tenir compte d'un article avec Lukasiewicz où la théorie de l'opérateur de conséquence est utilisée pour présenter la logique propositionnelle :

« Untersuchungen über den Aussagenkalkül », article de 22 pages, compte rendu d'une séance de la *Société des Sciences et des lettres de Varsovie* publié en 1930 (LT30).

Dans ces quatre publications la théorie est présentée avec certaines variations, certaines fluctuations, en particulier les notations changent. Dans l'édition anglaise de ses œuvres destinées au grand public, *Logic, Semantics, Metamathematics* (LSM), qui inclut T30a, LT30 et T30b, Tarski a changé les notations originales, sans doute par souci d'uniformisation. Nous utiliserons également cette notation uniformisée qui est devenue la manière usuelle de

---

[1] Titulaire d'une bourse du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique. Membre du projet LOCIA (CNPq, Brésil). Merci à João Marcos pour quelques commentaires.

présenter l'opérateur de conséquence. Les admirateurs de symboles, les polyglottes et autres puristes pourront se plonger dans les *Collected Papers* de Tarski qui reproduisent les versions originales et incluent la note T28 absente de l'édition anglaise grand public. Pour les citations nous faisons référence à la pagination des *Collected Papers*.

Commençons par le commencement et examinons la note de 1928. Précisons tout d'abord que suivant l'éminent Tarskiologue, le Professeur Jan Zygmunt de l'Université de Wroclaw, éditeur des œuvres de Tarski en Pologne, il s'agit bien de la première trace écrite concernant l'opérateur de conséquence. Cette note a été rédigée en français, ce qui nous facilitera la tâche, puisque ainsi nous n'aurons pas besoin de nous risquer à une traduction aléatoire des notions exprimées ultérieurement en langue allemande. Les polonais manipulaient à cette époque parfaitement le français et l'on peut donc penser que Tarski avait justement choisi ses mots.

Dans cette note de 1928 sont introduites les deux notions de base de la théorie : *les propositions pourvues de sens* qui forment un ensemble S, et *l'ensemble des conséquences* $Cn(X)$ d'un ensemble X de telles propositions, qui est lui-même un ensemble de propositions. Trois propriétés pour l'opérateur de conséquence Cn sont énoncées :

Réflexivité : $X \subseteq Cn(\mathrm{x})$
Monotonie : Si $X \subseteq Y$ alors $Cn(X) \subseteq Cn(\mathrm{Y})$
Transitivité : $CnCn(X) \subseteq Cn(X)$

C'est ce que nous appellerons dorénavant les axiomes de Tarski. Les noms que nous avons indiqués n'apparaissent pas dans T28, mais ce sont devenus par la suite les appellations les plus courantes, appellations sur lesquelles nous aurons l'occasion de revenir. Remarquons également que dans T28, ces propriétés ne sont pas appelées axiomes et que l'axiome de transitivité est présenté sous une autre forme, détails sur lesquels nous reviendrons également.

Là encore nous suivons la présentation de la théorie telle qu'elle a été standardisée ultérieurement en Pologne (voir par exemple l'ouvrage de Pogorzelski : *Notions and theorems of elementary formal logic*). Mais insistons sur le fait que les « axiomes de Tarski » se trouvent à peu de chose près dans cette note de 1928.

2. L'axiomatisateur axiomatisé

Demandons nous maintenant de quel chapeau Tarski a tiré ses axiomes. Remarquons tout d'abord que ces axiomes sont vérifiés aussi bien par :

(a) une notion de conséquence générée par un système de théorie de la démonstration à la Hilbert,
(b) une notion de conséquence sémantique telle que celle présentée ultérieurement par Tarski lui-même (Tarski 1936),
(c) ce que l'on appelle en algèbre universelle un système de clôture.

Mais si l'on se penche un peu sur les textes, il n'y a pas l'ombre d'un doute : Tarski présente ces axiomes comme rendant compte d'une notion de conséquence telle qu'elle se manifeste en théorie de la démonstration. Ainsi dans T30a, il nous dit: « Aus den Aussagen einer beliebigen Menge X lassen sich mit Hilfe gewisse Operationen, der s.g. Schlussregeln, andere Aussagen bilden, die Folgerungen der Menge X genannt werden» (T30a, p.314) (et il répète quasiment la même chose dans T30b, p.349). Et c'est de cette notion de conséquence définie par des régles d'inférence que sa théorie prétend rendre compte. Dans une note de pas de page rajoutée lors de l'édition de LSM, il ajoute : « More generally they are now referred to as *sentences derivable from the set X*, while the term *consequences* is reserved for semantical consequences» (LSM, p.30).

Par ailleurs des axiomes supplémentaires qui apparaissent dans T30a et T30b, et qui ne sont pas valables en général pour (b) et (c), montrent bien que c'est (a) que Tarski avait en vue. Toutefois c'est un fait remarquable, amusant et surprenant que dans cette note de 1928 n'apparaissent pas ces axiomes supplémentaires et que se dessine ainsi une théorie beaucoup plus générale que Tarski ne l'imaginait lui-même et qui a des traits frappants avec d'autres théories développées à la même époque par d'autres personnes poursuivant d'autres objectifs. Ainsi en 1970, Bloom, Brown et Suszko attribuaient la co-paternité de la notion de système de clôture à Tarski, Moore, Birkhoff et Ore.

Avec sa théorie, Tarski cherche donc à décrire les propriétés essentielles de toute notion de conséquence définie par ce qu'on appelle aujourd'hui un système de démonstration axiomatique ou système de démonstration à la Hilbert. Dans un tel système, on dit qu'une proposition x est conséquence d'un ensemble de propositions X, s'il y a une démonstration de x à partir de X, c'est-à-dire, une suite finie de propositions dont chacune est soit un élément de X, soit un axiome du système, soit la conclusion d'une règle du système dont les prémisses la précèdent dans la suite. Etant donné cette définition explicite, on peut vérifier que toute notion de conséquence ainsi définie est réflexive, monotone et transitive. Mais à l'époque la définition n'était sans doute pas clairement formulée, et l'idée dont part Tarski dans T30b pour formuler ses axiomes est la suivante:

«Aus dem oben angegebenen Definitionsschema der Folgerungsmenge folgt weiter, daβ jede Aussage, die zu einer gegebenen Aussagenmenge gehört, zugleich als seine Folgerung dieser Menge zu betrachten ist, ferner, daβ die Folgerungsmenge einer Aussagenmenge aus lauter Aussagen besteht und daβ die Folgerungen der Folgerungen wiederum Folgerungen sind. Diese Tatsachen finden in zwei nächsten Axiomen ihren Ausdruck» (T30b, p.350).

Et il écrit alors les deux axiomes :

$X \subseteq Cn(X)$
$CnCn(X) = Cn(X)$

L'axiome de transitivité est formulé ici avec une égalité, tout comme dans la note de 1928, sans doute pour suivre l'intuition de base énoncée par Tarski, alors même qu'il est très facile de voir que l'inclusion $Cn(X) \subseteq CnCn(X)$ se déduit de l'axiome de réflexivité.

Ensuite Tarski introduit argumente que les règles d'inférence n'ont qu'un nombre fini de prémisses pour énoncer l'axiome suivant :

Axiome de finitude : $Cn(X) = \cup\, Cn(Y)$, Y sous-ensemble fini de X

Notons que si l'on voulait justifier vraiment cet axiome il faudrait insister également sur le fait qu'une démonstration est une suite finie d'applications de règles.

Ces trois axiomes apparaissent sous la même forme dans T30a et T30b, et dans les deux articles le premier résultat montré par Tarski est que la monotonie en découle. La monotonie n'est donc pas présentée comme axiome en 1930, probablement pour éviter la redondance (quoique la redondance apparaisse au niveau de la transitivité comme nous l'avons remarqué). Dans la note de 1928, la monotonie n'était d'ailleurs pas non plus vraiment présentée comme axiome, pas plus que la réflexivité et la transitivité mais comme propriétés de l'opérateur de conséquence au côté d'ailleurs d'une autre propriété qui se déduit de ces trois. Il est dit : « M. T. signale quelques propriétés élémentaires de la notion (de conséquence)». En 1928, il ne s'agit donc pas d'une axiomatisation systématique, mais d'une description partielle de propriétés fondamentales de la notion de conséquence qui seront ensuite organisées en axiomes.

Mais ce qui importe de souligner c'est que ces axiomes axiomatisent la notion de conséquence telle qu'elle apparaît dans les systèmes de théories de démonstration axiomatique dont on attribue l'origine à Hilbert. Après Tarski, on peut dire que Hilbert apparaît dans la position de l'axiomatisateur axiomatisé.

3. Les axiomes de Tarski et la métamathématique

Alors que Hilbert était passé de la mathématique à la métamathématique, Tarski semble faire ici un pas de plus dans l'abstraction. Passe-t-il donc à la métamétamathématique? Remarquons le titre de T30a : « Sur des concepts fondamentaux de la métamathématique ». Il s'agit donc de fondements de la métamathématique, et si l'on identifie fondements des mathématiques et métamathématique, pourquoi ne pas identifier fondements des métamathématiques et métamétamathématiques? En Pologne à cette époque on emploie également l'expression « métalogique » qui semble également nous placer à un troisième niveau, si l'on identifie logique avec métamathématique (comme le faisait encore Kleene en 1952) ou du moins si l'on considère que la logique se situe au même niveau que la métamathématique.

Selon Hilbert, l'inventeur de l'expression « métamathématique », cette discipline a pour objet d'étude les démonstrations mathématiques, il emploie d'ailleurs l'expression « théorie de la démonstration » (Beweistheorie) de façon synonyme. Cette étude s'opère en développant certains concepts : les notions des règles d'inférence, d'axiome et de démonstration formelle, et en prouvant certains théorèmes : e.g. théorème de la déduction, théorème d'interpolation (qui sont parfois appelés métathéorèmes).

La théorie de Tarski apparaît bien d'une certaine manière prendre pour objet les concepts de la métamathématique. Les axiomes de Tarski prétendent décrire les propriétés fondamentales de la notion centrale de la théorie de la démonstration : la notion de conséquence. Mais cette théorie développée par Tarski n'est-elle pas elle-même sujette à la théorie de la démonstration, n'y a-t-il pas cercle vicieux ? Après la seconde guerre mondiale, les malins polonais intituleront un de leurs ouvrages *The mathematics of metamathematics*, affirmant ainsi explicitement un penchant au vice. Savoir s'il y a vice ou non, n'est pas l'objet de notre présente discussion, notre but est plutôt de donner une idée de comment apparaît la théorie de Tarski, afin de mieux la comprendre, c'est seulement ensuite qu'une discussion sérieuse sur son caractère putativement vicieux pourra être envisageable.

Les axiomes de Tarski ne sont pas des axiomes d'un système de démonstration, non seulement parce qu'ils se trouvent à un niveau métathéorique supérieur, mais aussi parce que ce niveau métathéorique ne doit pas être considéré dans la perspective de la théorie de la démonstration, mais plutôt dans la perspective de la théorie des modèles.

4. Les axiomes de Tarski et leurs modèles

Les modèles de ces axiomes sont des structures de type $<S ;Cn>$ où le domaine S de la structure est un ensemble à la structure non spécifiée et Cn une fonction de $\mathscr{P}(S)$ dans $\mathscr{P}(S)$. Le type de ces structures est similaire au type des structures topologiques. Les axiomes de Tarski présentent également une forte similitude avec des axiomes topologiques. On peut d'ailleurs se demander dans quelle mesure Tarski n'a pas été influencé par la topologie qui a beaucoup été développée en Pologne dans les années 1920 notamment par Kuratowski avec lequel Tarski a collaboré.

Notre interprétation en termes de modèle des axiomes de Tarski pourrait être taxée d'anachronique, puisque la théorie des modèles n'a été explicitement développée que dans les années 1950. Toutefois, d'une part cette façon de penser était très présente depuis la fin du

XIXème siècle, et d'autre part il semblerait que le développement de la théorie de l'opérateur de conséquence (conjointement avec la théorie des matrices logiques) est servi en quelque sorte d'inspiration et de « modèle » pour le développement de la théorie des modèles, créée comme on le sait par Tarski lui-même, c'est du moins ce qu'a suggéré Dana Scott (1974).

De la même manière que l'on peut étudier les structures de type $<A;\leq>$ obéissant aux axiomes de réflexivité, d'antisymétrie et de transitivité, c'est-à-dire les structures d'ordre, on peut étudier les structures de type $<S\,;Cn>$ obéissant aux axiomes de Tarski.

Et de la même manière que l'on peut étudier les structures de type $<A;\leq,\times>$ qui sont des expansions de structures d'ordre où $\times$ est une opération binaire obéissant à des axiomes tels que par exemple la commutativité et l'associativité, on peut étudier les structures de type $<S\,;Cn, \wedge>$ où $\wedge$ est une opération binaire obéissant à l'axiome suivant :

$$x \wedge y \in Cn(X) \text{ ssi } Cn(X, x, y) \subseteq Cn(X)$$

Une structure vérifiant cet axiome correspond à la logique de la conjonction. Les propriétés de la conjonction qui se « déduisent » de cet axiome, sont les propriétés qui sont vraies dans toutes les structures vérifiant cet axiome, conformément à la notion de déduction de la théorie des modèles, ou bien les propriétés que l'on peut démontrer en suivant certaines règles d'inférence, conformément à la notion de déduction de la théorie de la démonstration. Ce qui en principe revient au même si l'on a un théorème de complétude, ce qui n'est pas forcément évident puisque l'on se situe ici au second ordre.

Quoiqu'il en soit, il faut insister sur le fait que de toute façon cette présentation ne se ramène pas à une présentation en termes d'un système de démonstration usuel pour une logique propositionnelle bien que certaines correspondances avec un tel système puissent être établies. Ce qui est important c'est de noter que malgré certaines similitudes les axiomes de la théorie de Tarski ne sont ni des axiomes, ni des règles d'un tel système. Nous allons étudier plus avant les rapports entre les systèmes de démonstration avec lesquels on a le plus de chance de confondre la théorie de Tarski, les systèmes de Gentzen, mais avant d'en arriver là nous avons besoin de passer par un étape intermédiaire.

5. La relation de conséquence

La théorie de Tarski peut être reformulée de façon équivalente en utilisant, au lieu d'un opérateur de conséquence, une relation de conséquence, c'est-à-dire une relation binaire entre ensembles de formules et formules. On utilise généralement le symbole de Frege pour désigner cette relation, et on écrit « $X \vdash$ x » qui se lit « x est conséquence de X ».

Dans ce cadre on présente généralement les axiomes de Tarski de la façon suivante :

(1) $X \vdash x$, si $x \in X$
(2) Si $X \vdash x$ et $X \subseteq Y$ alors $Y \vdash x$
(3) Si $Y \vdash x$ et $X \vdash y$ pour tout $y \in Y$, alors $X \vdash y$

Notons que malgré les apparences il n'y a pas une correspondance point par point entre ces trois axiomes et les trois axiomes de Tarski. Autrement dit, ils ne sont pas équivalent un à un. Si on appelle donc (1), (2), (3) respectivement axiomes de réflexivité, monotonie, transitivité, cela risque de prêter à confusion, mais d'autre part avoir des noms différents pour des axiomes qui sont presque identiques ne favorise pas forcément la clarté.

Lorsque l'on dit que cette théorie est équivalente à celle de Tarski, il faut cependant être prudent : en effet tout ce qui peut être prouvé pour l'une, peut être prouvée pour l'autre, mais lorsque l'on manipule ces théories on ne réfléchit pas forcément de la même manière, et les preuves peuvent être plus faciles à démontrer dans un cas ou dans un autre, de même que les concepts peuvent être plus faciles à exprimer dans un cas ou dans un autre.

Si on utilise une relation de conséquence au lieu d'un opérateur de conséquence on peut par exemple reformuler les trois axiomes en un seul :

$X \vdash x$ ssi (si pour tout Y, $Y \vdash z$ pour tout $z \in X$, alors $Y \vdash x$)

Une autre illustration amusante de l'usage de la relation de conséquence est la formulation de la logique intuitionniste de l'implication pure qui est définie en rajoutant simplement l'axiome :

$X, x \vdash y$ ssi $X \vdash x \rightarrow y$

Cela nous donne vraiment la sensation que cet axiome décrit le passage ou la transformation de la relation de conséquence au niveau connectif.

Considérons seulement la moitié de cet axiome, c'est-à-dire :

Si $X, x \vdash y$ alors $X \vdash x \rightarrow y$

On pourrait penser qu'il s'agit exactement de la règle droite de l'implication dans le système de séquent de Gentzen pour la logique intuitionniste où comme on le sait le nombre de formules du côté droit du séquent est limité à l'unité. Et les notations utilisées de nos jours tendent à rendre ce genre de confusion immédiate, puisque l'on utilise le symbole de Frege $\vdash$ dans les séquents et que certaines personnes vont même jusqu'à appeler séquent une expression de la théorie de la relation de conséquence de la forme $X \vdash x$. C'est une grave erreur car une expression de la forme $X \vdash x$ signifie que x est conséquence de X, il s'agit donc d'une assertion (d'où l'emploie justifié du symbole de Frege), alors qu'un séquent n'est qu'une paire.

L'erreur devient dramatique quand on identifie un groupe de soi-disant séquents, présentés sous la forme d'un « si … alors », comme dans le cas de la moitié de l'axiome ci-dessus, avec une *règle* d'un système de séquent car cela empêche de comprendre le résultat le plus important du calcul des séquents, le théorème de l'élimination des coupures. Ce résultat nous dit, dans le cas de la logique intuitionniste, qu'une règle qui ressemble à l'axiome (3) de transitivité, appelée règle de coupure, est éliminable, au sens où l'on prouve les mêmes choses sans ou avec cette règle. Une conséquence de ce théorème est que dans le système LJ- sans cette règle, la propriété (3) vaut pour la logique engendrée par le système alors même qu'elle n'est pas une règle dérivable dans le système. La propriété (3) n'est donc en aucun cas une règle du système LJ-, mais elle est valide dans la logique engendrée.

On dit parfois que la règle ressemblant à (3), la règle de coupure est une règle permissible, c'est-à-dire une règle, qui si on l'ajoute, n'ajoute rien. Toutefois comme évidemment toute règle dérivable est permissible, il faut ajouter que la règle de coupure est permissible et non dérivable. Si la règle de coupure était dérivable le théorème de l'élimination des coupures serait trivial. Mais de toute façon même dire tout cela n'exprime qu'indirectement le fait que la propriété (3) est valide dans la logique engendrée par le système sans la règle coupure, raison pour laquelle elle seule mérite d'être exprimée en usant le symbole d'assertion.

6. Hertz, Gentzen et Scott

Ce qui ressemble le plus à la théorie de l'opérateur de conséquence, une fois mise sous la forme d'une relation de conséquence, c'est le système de Paul Hertz introduit d'ailleurs antérieurement à la théorie de Tarski, qui présente des propriétés similaires aux axiomes de

Tarski. Mais le système de Hertz est clairement énoncé sous la forme d'un système de démonstration et la monotonie et la transitivité apparaissent clairement comme règles. Un point commun entre Hertz et le Tarski de 1928 est que Hertz reste au niveau abstrait sans introduire de connecteurs.

Notons que Hertz n'utilisait pas le symbole de Frege dans ses « Satzen », ancêtres des séquents de Gentzen et que Gentzen reprenant les notations de Hertz n'utilisera pas non plus le symbole de Frege.

Gentzen reprend la théorie de Hertz et la modifie de trois façons : il considère des suites au lieu d'ensembles (d'où la terminologie « séquents »), il multiplie le nombre de formules à droite de la Satz hertzienne (sauf dans le cas de la logique intuitionniste) et il présente des règles pour les connecteurs.

Evidemment malgré les différences entre les deux approches, Tarski d'une part, Hertz-Gentzen d'autre part, il y a de nombreuses connexions. C'est ainsi que par exemple le théorème démontré par Gentzen dans son premier article (1932), qui constitue une étude du système de Hertz encore non gentzennisé, peut être « traduit » en termes d'opérateur ou de relations de conséquence.

La théorie de Tarski a été généralisée à une théorie que l'on peut facilement confondre avec les systèmes de Gentzen, où la relation de conséquence est définie entre ensembles de formules. C'est ce que l'on appelle parfois les logiques à conclusions multiples. Dana Scott en particulier a travaillé dans cette direction mais en présentant les choses de telle façon à ce que la confusion avec l'approche de Gentzen soit constante, puisqu'il présente la généralisation des axiomes de Tarski comme des règles d'inférence. Oublions donc Dana Scott et reformulons les axiomes de Tarski dans l'esprit de sa théorie originale :

(1M) $X \vdash Y$, si $X \cap Y \neq \emptyset$
(2M) Si $X \vdash Y$ et $X \subseteq Z$, alors $Z \vdash Y$; et si $Y \subseteq Z$ alors $X \vdash Z$
(3M) Si $X \vdash Z,C$ et $C, X' \vdash Z'$, alors $X,X' \vdash Z,Z'$

7. Logiques sous-structurelles

On distingue dans les systèmes de Gentzen, deux groupes de règles : les règles structurelles et les règles logiques. Ces dernières concernent les opérateurs logiques : connecteurs, quantificateurs, etc. Parmi les règles structurelles, il y a des règles liées à la notion de suite : contraction, permutation et des règles qui ressemblent à des traductions des axiomes de Tarski dans leur forme ci-dessus : l'axiome d'identité, les règles d'affaiblissement et la règle de coupure.

Dans la littérature à l'eau de rose on appelle logiques sous-structurelles un peu tout et n'importe quoi, mais l'idée de base, d'où vient la terminologie, est la modification ou le rejet de certaines règles structurelles. En logique linéaire par exemple on restreint la contraction.

Faut-il appeler sous-structurelles des logiques n'obéissant pas à l'axiome de monotonie de Tarski ? - les fameuses logiques non-monotones. C'est là qu'il faut une fois de plus faire clairement la distinction entre Tarski et Gentzen. Un système de Gentzen dans lequel il n'y a pas de règle d'affaiblissement, l'analogue de la monotonie en termes de règle, engendre une logique monotone si l'on s'en tient à la définition standard de l'engendrement. Il faudrait donc faire clairement la distinction entre un système de démonstration sous-structurel et une logique sous-structurelle.

Dans la théorie de Tarski on ne peut pas présenter d'axiomes analogues aux règles de contraction ou de permutation, mais on peut modifier cette théorie de manière à pouvoir le faire, il suffit de considérer que l'opérateur ou la relation de conséquence soit définit sur un ensemble structuré. Ce n'est donc pas sur ce point que les théories de Tarski et Gentzen différent fondamentalement, pas plus que sur la question de la multiplicité des formules à droite, mais bien plutôt sur l'esprit général : dans un cas (Gentzen) on a un système formel de démonstration, dans un autre (Tarski), on a une théorie axiomatique informelle, facilement concevable en termes de théorie des modèles, et dont la théorie de Gentzen n'est une formalisation que dans un sens très limité. Il faudrait plutôt parler d'une certaine projection formelle, ou image formelle ne reflétant que certains aspects.

8. L'axiome de structuralité de Los et Suszko

En partant aux Etats-Unis juste avant la seconde guerre mondiale, Tarski a pour ainsi dire abandonné la théorie de l'opérateur de conséquence, comme s'il l'avait oubliée en Pologne. Mais là-bas elle n'est pas morte et s'est beaucoup développée lors de l'après guerre. C'est devenu toutefois un sujet typiquement polonais, peu connu et souvent incompréhensible pour les étrangers.

Parmi les logiciens qui ont travaillé à cette théorie, il faut signaler Jerzy Los et Roman Suszko, qui en même temps qu'ils développaient cette théroie - est-ce un hasard ? - apportaient d'importantes contributions à la théorie des modèles tout juste sortie du berceau.

En 1958, dans un article au titre banal, « Remarks on sentential logics », ils introduisent un nouvel axiome à la théorie de Tarski, l'axiome de structuralité et définissent par la-même occasion la notion d'opérateur de conséquence structural. De quoi s'agit-il ?

Comme nous l'avons remarqué, originellement Tarski ne spécifie pas la nature des objets de l'ensemble *S*. Ensuite il introduit les connecteurs (implication et négation), c'est l'Axiome 6 de T30a :

Si $x\in S$ et $y\in S$ alors $c(x,y)\in S$ et $n(x)\in S$

Cet axiome n'est pas un axiome exprimant des propriétés de ces connecteurs, des axiomes ultérieurs seront formulés, mais un axiome d'*introduction* des connecteurs (pas au sens de la déduction naturelle !). Si les connecteurs sont introduits de telles façon, dans une structure modèle de ces axiomes $<S;c,n,Cn>$, c et n sont des fonctions (respectivement binaire et unaire), et l'opérateur Cn est donc défini sur la structure $<S;c,n>$ qui est une algèbre abstraite au sens de Birkhoff (cette notion a été introduite pas Birkhoff vers 1930).

Cette structure ne rend pas compte de la doctrine atomiste selon laquelle les formules sont construites à partir d'atomes. Pour ce faire il faut introduire la notion d'algèbre absolument libre, et c'est ce que font Los et Susko (cette idée semble être originellement due à Lindenbaum dont Los connaissait bien les travaux). Dans l'article de 1958, ils définissent l'opérateur Cn sur une algèbre absolument libre. Ce qui les dispense d'avoir des axiomes d'introduction pour les connecteurs, ceux-ci sont donnés par l'algèbre. Et ils utilisent la notion d'endomorphisme de cette algèbre pour énoncer

l'axiome de structuralité : $\varepsilon Cn(X) \subseteq Cn(\varepsilon X)$, pour tout endomorphisme ε

La notion d'endomorphisme correspond à la notion informelle de substitution, et l'axiome de structuralité énonce que l'opérateur de conséquence est stable par substitution, c'est une formulation claire et précise du vieil adage aristotélicien suivant lequel la vérité logique ne dépend pas du contenu ou de la signification, mais seulement de la forme.

On se rappelle que Couturat et Russell tergiversaient sur le statut de la règle de substitution, ils se demandaient si c'était vraiment une règle comme les autres ou non. L'introduction par Von Neumann de la notion de schéma de formule et de règle semblait militer en faveur d'une réponse négative, puisqu'alors la règle disparaissait.

La théorie de l'opérateur de conséquence revue par Los et Suszko apporte une réponse particulièrement claire à cette question. La substitution est un axiome de même que la monotonie ou encore qu'un axiome pour l'implication. Mais pour que cet axiome puisse être exprimé, il faut que la structure du langage, i.e., de l'ensemble des formules soit explicitée. C'est cette structure qui permet d'exprimer la notion de forme logique, par le moyen de la notion d'endomorphisme, à partir de laquelle on peut énoncer l'axiome de structuralité.

Los et Susko ont vérifié que toutes les logiques connues étaient structurales. Ce qui est curieux c'est que même des logiques comme les logiques relevantes sont structurales (à ce sujet voir notre artile de 1999).

9. L'adieu aux axiomes de Tarski

Suszko est ensuite revenu à un type de structure plus simple où l'opérateur *Cn* est un opérateur défini simplement sur une algèbre (non nécessairement libre) et obéissant aux trois axiomes de Tarski. C'est ce qu'il appelle la *logique abstraite*.

Nous avons nous même suggéré de revenir simplement à l'idée originale de Tarski et de considérer que l'opérateur de conséquence, ou la relation de conséquence, soit définie sur un ensemble nu de toute structure. Parce que, d'une part la notion de logique structurale n'est qu'un cas particulier de logique, et que d'autre part il n'y pas non plus de raison de considérer avec Suszko que les opérateurs logiques sont nécessairement des fonctions.

Nous pensons avec Koslow que les opérateurs logiques doivent et peuvent être conçus à partir de la notion de conséquence qui est la notion première et fondamentale, suivant l'idée de Tarski. Bien que Tarski n'est pas lui-même exprimé les opérateurs logiques directement à partir de la notion de conséquence, il énonce un axiome qui va dans ce sens, il s'agit de l'axiome 5 de T38a dont nous n'avons encore pas parlé, qui est le suivant

Axiome de trivialisation : il existe $x \in S$, tel que $Cn(x) = S$

Aujourd'hui on dit qu'une logique vérifiant cet axiome est *finiment trivialisable* (plus précisément *singulièrement trivialisable*). Cette propriété qui ne concerne directement aucun connecteur est toutefois liée à la présence putative d'une négation.

Finalement tout en proposant de revenir à la présentation originale plus abstraite de Tarski, nous avons également proposé de nous débarrasser des axiomes de Tarski. D'une part parce qu'ils ne semblent pas pouvoir être justifiés dans l'absolu (logiques non monotones, logiques non transitives, logiques non réflexives), d'autre part parce qu'il est tout à fait possible de développer une théorie de la conséquence sans axiome de même que Birkhoff a développé l'algèbre universelle en prenant comme point de départ une définition de structure algébrique n'obéissant à aucun axiomes.

Cette théorie qui prend pour point de départ des structures logiques ayant pour seul concept primitif la notion de relation de conséquence, relation n'obéissant à aucun axiome, nous l'avons baptisée *logique universelle* para analogie avec la théorie de Birkhoff.

10. Bibliographie

Jean-Yves Béziau, 1994, « Universal logic », *Logica'94*, P.Kolar et V.Svoboda (eds), Académie des Sciences, Prague.

Jean-Yves Béziau, 1995, *Recherches sur la logique universelle*, Thèse de Doctorat, Université Denis Diderot (Paris 7).

Jean-Yves Béziau, 1999, « Rules, derived rules, permissibles rules and the various types of system of deduction », in *Proof, types and categories*, PUC, Rio de Janeiro, pp.159-184.

Jean-Yves Béziau, 1999, « The philosophical import of Polish logic», in *Methodology and Philosophy of Science at Warsaw University*, M.Talasiewicz (ed), Varsovie, pp.109-124.
Jean-Yves Béziau, 2001, «From paraconsistent logic to universal logic», *Sorites*, **12**, pp.5-32.
Jean-Yves Béziau, 2005, « A survey of general abstract logic », in *Trends on universal logic*, à paraître.
Jean-Yves Béziau, « Tarski on consequence and consequence », à paraître.
Jean-Yves Béziau, « Does logic need axioms? », à paraître.
Jean-Yves Béziau et Ana Teresa de Castro Martins, « Non-transitive logics », à paraître.
Garret Birkhoff, « Universal algebra », in *Comptes Rendus du Premier Congrès Canadien de mathématiques,* Presses de l'Université de Toronto, Toronto, 1946, pp.310-326.
Jan Lukasiewicz et Alfred Tarski, 1930, « Untersuchungen über den Aussagenkalkül », *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des lettres de Varsovie* XXIII, Classe III, pp.30-50.
Stephen L.Bloom, Donald J.Brown et Roman Suszko, 1970, « Some theorems on abstract logics», *Algebra and Logic,* **9**, 165-168.
J.Brown et Roman Suszko, 1973, « Abstract logics», *Dissertationes Mathematicae,* **102**, 9-41.
Paul Hertz, 1929, «Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme», *Matematische Annalen*, **101**, 457-514.
Gehrard Gentzen, 1932, «Über die Existenz unabhangiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsystemen », *Matematische Annalen*, **107**, 329-350.
Arnold Koslow, 1992, *A structuralist theory of logic*, CUP, New-York.
Jerzy Los et Roman Suszko, 1958, « Remarks on sentential logics », *Indigationes Mathematicae*, **20**, 177-183.
Witold Pogorzelski, 1994, *Notions and theorems of elementary formal logic*, Presses de l'Université de Varsovie à Bialystok, Bialystok.
Dana Scott, 1974. « Completeness and axiomazibility in many-valued logic », in *Proceedings of the Tarski Symposium*, L.Henkin (ed.), AMS, Providence, pp.411-435.
Alfred Tarski, 1928, « Remarques sur les notions fondamentales de la méthodologie des mathématiques », *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*.
Alfred Tarski, 1930a, « Über einige fundamenten Begriffe der Metamathematik », *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des lettres de Varsovie* XXIII, Classe III, pp.22-29
Alfred Tarski, 1930b, « Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I », *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37, pp.361-404.
Alfred Tarski, 1936, «O pojciu wynikania logicznego», **39,** 58-68.
Alfred Tarski, 1983, *Logic, Semantics, Metamathematics,* Deuxième edition (John Corcoran), Hackett, Indianapolis (Première edition, 1956 chez Oxford).
Alfred Tarski, 1986, *Collected Papers*, 4 volumes, S.Givant et R.McKenzie (eds), Birkkhäuser, Bâle.